Continuidade e Limites de Funções Complexas

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que f **é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(f(z_0))$$

ou

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\varepsilon>0} \forall_{z \in D_f} : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \delta$$

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diz-se que **f é contínua no ponto** $z_0 \in D_f$ se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\} \subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$$

Teorema: As definições de continuidade à Heine e à Cauchy são equivalentes.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Então, f é contínua no ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$ se e só se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas em (x_0, y_0) (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas no ponto $z_0 \in D_f \cap D_g$. Então, são contínuas em z_0 as funções

- $f \pm g$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g} \qquad (g(z_0) \neq 0)$.

Se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em $f(z_0) \in D_h$ então também é contínua em z_0 a composta $h \circ f$.

Definição (Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função f quando z tende para z_0 é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\delta > 0}\ \exists_{\varepsilon > 0} : z \in B_\varepsilon(z_0) \cap D_f \Rightarrow f(z) \in B_\delta(L),$$

ou

$$\forall_{\delta > 0}\ \exists_{\varepsilon > 0} \forall_{z \in D_f} : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - L| < \delta.$$

No caso de z_0 ou L serem infinitos, usam-se exteriores de bolas centradas na origem como vizinhanças de ∞, na definição anterior.

Definição (Heine): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Diz-se que o **limite da função f quando z tende para z_0 é** $L \in \mathbb{C}$, e escreve-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

se satisfaz a condição

$$\forall_{\{z_n\} \subset D_f} : z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to L$$

Teorema: As definições de limite à Heine e à Cauchy são equivalentes e as mesmas que em $\mathbb{R}^2$. Quando existe, o limite é único.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto do domínio de f, $z_0 \in D_f$. Então o limite $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ existe se e só se f é contínua em z_0 e $L = f(z_0)$.

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

e $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto aderente ao domínio de f, $z_0 \in \overline{D_f}$. Então,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L = a + ib,$$

se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

no sentido de $\mathbb{R}^2$.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \overline{D_f} \cap \overline{D_g}$. Então, se existem os limites $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$, existem também

- $\lim_{z\to z_0} f \pm g = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{z\to z_0} f \cdot g = L_1 \cdot L_2$
- $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0),$

com os cuidados devidos para as situações de limites infinitos e possíveis indeterminações.

Diferenciabilidade Complexa

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Diz-se que f **é diferenciável, ou tem derivada, no sentido complexo em** z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Quando este limite existe o seu valor designa-se por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Diz-se que f **é holomorfa, ou analítica num ponto** z_0 se f for diferenciável em todos os pontos duma bola centrada em z_0.

Diz-se que f **é inteira** se $D_f = \mathbb{C}$ e se f é diferenciável em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Então, se f é diferenciável em $z_0 \Rightarrow f$ é contínua em z_0.

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_g \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciáveis em $z_0 \in \text{int}D_f \cap \text{int}D_g$. Então

- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
- $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \quad (g(z_0) \neq 0),$

e se $h : D_h \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável em $w = f(z_0) \in \text{int}D_h$

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$